

DOI: <https://doi.org/10.36719/2789-6919/56/121-128>

Zülfüqar Hüseynov

Azərbaycan Dövlət Neft və Sənaye Universiteti
magistrant

<https://orcid.org/0009-0008-1303-0459>
zulfuqarrhuseynovv@gmail.com

Çoxbucaqlılar üzrə sərhəd inteqral tənliklərinin həlli üçün eksponensial yığılma üsulu

Xülasə

İşdə Laplas operatoru üçün qoyulmuş daxili Dirixle məsələsindən gələn potensiallar nəzəriyyəsinin sərhəd inteqral tənliyi və sonlu sayda künc nöqtələri olan oblastlarda müstəvi elastiklik nəzəriyyəsinin birinci sərhəd məsələsi üçün sərhəd inteqral tənliklər sistemi nəzərdən keçirilir. Sadə birləşmiş çoxbucaqlıların sərhədləri olan əyrilər üzrə bu tip inteqral tənliklərin nüvələrinin törəmələri və həlləri üçün qiymətləndirmələr alınmış və eyni kvadratur düsturlar ailəsinin istifadəsinə əsaslanaraq ədədi həll metodu qurulmuşdur. İstifadə olunan kvadratur düsturun düyünlərinin sayına görə metodun eksponensial yaxınlaşma sürəti verilmişdir.

Açar sözlər: *inteqral, tənlik, çoxbucaqlılar, Laplas operatoru, eksponensial yığılma üsulu*

Zulfugar Huseynov

Azerbaijan State Oil and Industry University
Master's student

<https://orcid.org/0009-0008-1303-0459>
zulfuqarrhuseynovv@gmail.com

Exponential Accumulation Method for Solving Boundary Integral Equations Over Polygons

Abstract

The boundary integral equation of potential theory is considered for the interior Dirichlet problem for the Laplace operator and a system of boundary integral equations for the first boundary value problem of plane elasticity theory in domains with a finite number of corner points. Estimates are given for the derivatives of the kernels and solutions of these types of integral equations on curves that are the boundaries of simply connected polygons, and a numerical solution method is constructed based on the use of the same family of composite quadrature formulas. The exponential rate of convergence of the method with respect to the number of nodes of the quadrature formula used is proven.

Keywords: *integral, equation, polygons, Laplace operator, exponential accumulation method*

Giriş

Çətin formalı sahələrdə elliptik tip sərhəd məsələlərinin ədədi həll üsullarından biri sərhəd inteqral tənliklər metodudur. Sərhəd inteqral tənlikləri şərti olaraq iki sinfə bölünə bilər: Birbaşa tənliklər, burada naməlum funksiyalar məsələnin məzmunlu formulyasiya baxımından mənalıdır.

Dolayı tənliklər (daha çox potensial nəzəriyyəsinin inteqral tənlikləri kimi tanınır), burada əsas məsələnin həlli köməkçi funksiyalar vasitəsilə inteqral hesablamalarla tapılır. Sərhəd inteqral tənliklərinin ədədi həllində, həm klassik kvadratur metodunda, həm də sərhəd elementləri metodunda, qeydsimmetrik dolu matrislərdən ibarət xətti tənliklər sistemlərini həll etmək lazım gəlir (Babushka və b., 1990; Parton və Perlin, 1977; Chendler, 1986).

Hesablama xərclərini azaltmaq üçün iki yanaşma tətbiq oluna bilər: Kvadratur düyünləri və ya sərhəd elementləri elə seçilir ki, təxmini sistemin matrisi ya birbaşa metodlarla sürətli həll olunacaq formada olsun, ya da həllə tez yaxınlaşan iterativ proses effektiv qurulsun.

Tədqiqat

Bu məqalədə araşdırılan yanaşma isə sistemin ölçüsünü azaltmaqla yanaşı, təxmini həllin dəqiqliyini artırmaqdan ibarətdir.

Əgər sahənin sərhədi bucaqlı nöqtələrdən ibarətdirsə, təxmini xətti sistemin qurulması xeyli çətinləşir, çünki müvafiq inteqral tənliklər zəif şəkildə təklif daşıyan olur. Belə sahələrdə, bəzi birbaşa sərhəd inteqral tənlikləri üçün sərhəd elementlərinin xüsusi seçimi hesabına sərbəstlik dərəcələrinin sayına nisbətən eksponensial yaxınlaşma sürətini təmin etmək mümkündür. İkinci növ potensial nəzəriyyəsi inteqral tənliklərinin ədədi həllində sərhəd elementləri metodundan daha praktik olaraq sadə üsul kvadratur metodudur (Kress, 1990; Maz'ya və Solov'ev, 1998). Standart yanaşma tərkib kvadratur formulasının qurulmasından ibarətdir; burada elementar parçalar bucaqlı nöqtələrə yaxınlaşdıqca sıxlaşır. Hər bir elementar parça üçün eyni sayda düyün istifadə olunur. Bu metod düyünlərin sayına görə cəbrən dəqiqlik dərəcəsini təmin edir.

Məlumdur ki, əgər sahənin sərhədi və sərhəd şərtləri analitikidirsə, orta düzbucaqlı tərkib formulasına əsaslanan metod eksponensial yaxınlaşma sürətinə malikdir. Bu baxımdan sərhədi bucaqlı nöqtələrdən ibarət olan sahələrdə potensial nəzəriyyəsinin inteqral tənliklərinin kvadratur metodu ilə eksponensial dəqiqliklə ədədi həllinin mümkünlüyü məsələsi ortaya çıxır. Bu nəticə, sərhəd tənliklərindəki inteqral təxmini üçün Gauss tərkib kvadratur formulalarının istifadə edilməsi ilə əldə oluna bilər; burada elementar parçalar konturun bucaqlı nöqtələrinə yaxınlaşdıqca sıxlaşır və elementar formulalardakı düyünlərin sayı bucaqlara yaxınlaşdıqca dəyişir. Belə yanaşma sərbəstlik dərəcələrinin sayına nisbətən eksponensial yaxınlaşma sürətini təmin etməyə imkan verir (Kong və b., 2011; Maz'ya, 1988; Khel'zing və Oiyala, 2008; Grekhem və Chendler, 1988).

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — sərhədi Γ olan məhdud oblastdır; Γ öz-özü kəsməyən qapalı əyridir və aşağıdakı parametrik təsvirə malikdir:

$\Gamma = \{x = x(s) = (x_1(s), x_2(s)), s \in [0, T], x(0) = x(T)\}$. Sonrakı mülahizələrdə qəbul edək ki,

$$\Gamma = \bigcup_{j=0}^{J-1} \Gamma_j$$

burada Γ_j -bucaq nöqtələri P_j və P_{j+1} -i birləşdirən düzxətli parça olub (burada $P_0=P_J$ qəbul edilir) α_j ilə P_j bucaq nöqtəsində daxili bucağın qiymətini işarə edək; bu zaman $0 < \alpha_j < 2\pi$ bütün j üçün bucaq nöqtələri P_j ilə ədədlər toplusu $\{s_j\}, j=0, \dots, J=0$ aşağıdakı kimi əlaqələndirilir:

$$x(s_j) = P_j, \quad j = 0, \dots, J,$$

$$0 = s_0 < s_1 < \dots < s_{J-1} < s_J = T.$$

Əvvəldə verilmiş Ω oblastında Laplas operatoru üçün Dirixle məsələsini nəzərdən keçirək:

$$\Delta u_0(x) = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$u_0(x) = F_0(x), \quad x \in \Gamma. \quad (1)$$

Həmçinin, elastiklik nəzəriyyəsinin birinci sərhəd məsələsini:

$$\mu \Delta \vec{u} + (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \vec{u} = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$\vec{u} = \vec{F}, \quad x \in \Gamma. \quad (2)$$

Burada $\vec{u}=(u_1, u_2)^T$ naməlum vektor-funksiyadır, λ, μ — Lamé sabitləridir, $\vec{F} = (F_1, F_2)^T$.

Sonrakı hissələrdə qəbul edək ki, F_i $i=0,1,2$ funksiyaları Γ boyunca fasiləsiz və sonsuz diferensiallana biləndir; yalnız bucaq nöqtələrində aşağıdakı tip zəif tənliklərə yol verilir:

$$(s - s_j)^{\theta_j}, 0 < \theta_j < 1. \quad (3)$$

Həllin təsviri

(1) məsələsinin həllini ikiqat qat potensialı şəklində axtaracağıq:

$$u_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \Phi_0(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln |x - y| d\Gamma_y,$$

burada Φ_0 — naməlum sıxlıq funksiyasıdır və o, aşağıdakı sərhəd inteqral tənliyinin həllidir:

$$\Phi_0(x) + \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \Phi_0(y) \frac{\partial}{\partial n_y} \ln |x - y| d\Gamma_y = 2F_0(x), \quad x \in \Gamma \setminus \bigcup_{j=0}^{J-1} P_j. \quad (4)$$

(2) məsələsinin həllini müstəvi ikiqat qat potensialı şəklində axtaracağıq:

$$\vec{u}(x) = \int_{\Gamma} T_x(\partial_y, \vec{n}) \Gamma(y - x) \vec{\Phi}(y) d\Gamma_y,$$

burada $\Gamma(y-x)$ — (2) məsələsinin fundamental həllidir və aşağıdakı elementlərə malik matrisdir:

$$\Gamma_{ij}(y - x) = \frac{\lambda + 3\mu}{2\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \left(\delta_{ij} \ln |x - y| - \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu} \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{|x - y|^2} \right).$$

Burada $T_x(\partial_y, \vec{n})$ ilə ümumiləşdirilmiş gərginlik operatoru işarə olunur:

$$(T_x(\partial_y, \vec{n}))_{ij} = \mu \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial n_y} + (\lambda + \mu) n_i(y) \frac{\partial}{\partial y_i} + x_j(n_j(y)) \frac{\partial}{\partial y_i} - n_i(y) \frac{\partial}{\partial y_j} \quad (5)$$

Burada $i, j=1, 2$, δ_{ij} — Kroneker simvoludur.

$$\vec{\Phi}(x) + \int_{\Gamma} T_x(\partial_y, \vec{n}) \Gamma(y - x) \vec{\Phi}(y) dy = 2\vec{F}(x). \quad (6)$$

$\chi = \mu$ olduqda, (5) operatoru klassik gərginlik operatoru olur.

Əgər

$$\chi = \chi_0 = \frac{\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 3\mu},$$

olarsa, $T_x(\partial_y, \vec{n})$ operatoruna *pseudo-gərginlik operatoru* deyilir,

$\chi \neq \chi_0$ olan bütün hallarda (6) tənliyi həttə hamar sərhədli oblastlar üçün belə sinqulyardır, çünki onun nüvəsi aşağıdakı komponentləri ehtiva edir:

$$\frac{\partial}{\partial s_y} \ln |x - y|,$$

Burada

$\partial s / y \partial$ — Γ əyrisi üzrə y nöqtəsində *toxunma törəməsidir*.

Sonrakı hissədə yalnız $\chi = \chi_0$ halını nəzərdən keçirəcəyik; bu halda göstərilən sinqulyar komponentlər aradan qalxır.

İşarə edək:

$$T_{\chi_0}(\partial_y, \vec{n}) \equiv T(\partial_y, \vec{n}), \quad \vec{\Phi}_{\chi_0} = \vec{\Phi}.$$

(4) sərhəd inteqral tənliyinin və sərhəd inteqral tənliklər sisteminin ədədi həlli ilə bağlı məsələlərin araşdırılmasına keçək:

$$\vec{\Phi}(x) + \int_{\Gamma} T(\partial_y, \vec{n}) \Gamma(y-x) \vec{\Phi}(y) dy = 2\vec{F}(x). \quad (7)$$

3. Kvadratur metodu. Yuxarıda verilmiş Γ əyrisinin parametrizasiyasından istifadə edərək işarə edək:

$$\varphi_k(s) = \Phi_k(x(s)), \quad f_k(s) = 2F_k(x(s)), \quad k = 0, 1, 2.$$

Qoy t — $[s_j, s_{j+1}]$ parçasının daxili nöqtəsi olsun, $j=0, 1, \dots, J-1$

Aşağıdakı düsturlarla $K(s, t)$ və $M(s, t)$ funksiyalarını müəyyən edək:

$$K(s, t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{x_1'(t)(x_2(s) - x_2(t)) - x_2'(t)(x_1(s) - x_1(t))}{(x_1(s) - x_1(t))^2 + (x_2(s) - x_2(t))^2}, & t \neq s, \\ \frac{1}{2\pi} \frac{x_1'(t)x_2''(t) - x_2'(t)x_1''(t)}{(x_1'(t))^2 + (x_2'(t))^2}, & t = s, \end{cases}$$

$$M_{kl}(s, t) = \begin{cases} K(s, t) \left(a \delta_{kl} + b \frac{(x_k(s) - x_k(t))(x_l(s) - x_l(t))}{(x_1(s) - x_1(t))^2 + (x_2(s) - x_2(t))^2} \right), & t \neq s, \\ K(t, t) \left(a \delta_{kl} + b \frac{x_k'(t)x_l'(t)}{(x_1'(t))^2 + (x_2'(t))^2} \right), & t = s. \end{cases}$$

#

Burada

$$a = \frac{2\mu}{\lambda + 3\mu}, \quad b = \frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda + 3\mu}, \quad k, l = 1, 2.$$

İkiqat qat potensialının həndəsi xassələrindən belə nəticə çıxır ki, $s \in [0, T] \setminus \cup_{j=0}^{J-1}$ olduqda aşağıdakı münasibətlər ödənilir:

$$\int_0^T K(s, t) dt = 1, \quad \int_0^T M(s, t) dt = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bu halda (4) və (7) tənlikləri ekvivalent formada yazıla bilər:

$$2\varphi_0(s) + \int_0^T K(s, t)(\varphi_0(t) - \varphi_0(s)) dt = f_0(s), \quad s \in [0, T], \quad (8)$$

Və

$$2\vec{\varphi}(s) + \int_0^T M(s, t)(\vec{\varphi}(t) - \vec{\varphi}(s)) dt = \vec{f}(s), \quad (9)$$

Burada

$$\vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2)^T, \quad \vec{f} = (f_1, f_2)^T, \quad s \in [0, T].$$

Bu yanaşmanın əsas üstünlüyü ondan ibarətdir ki, bucaq nöqtələrinə yaxın ərazilərdə inteqralaltı funksiyaların hamarlığı artır.

[9,10]-dan məlumdur ki, istənilən fasiləsiz T-periodik funksiyalar üçün f_k , $k=0,1,2$ (8) və (9) tənlikləri müvafiq olaraq fasiləsiz T-periodik funksiyalar və vektor-funksiyalar fəzasında yeganə həllə malikdir.

(8) tənliyinin və (9) sisteminin təqribi həllini ümumi prinsipial sxem üzrə quracağıq. Qoy $\{n_k\}$ — artan sonsuz natural ədədlər ardıcılığı olsun. Hesab edək ki, hər bir $n=n_k$ üçün kvadratur formulu qurulmuşdur:

$$\int_0^T g(t) dt \approx \sum_{j=1}^n A_j^{(n)} g(t_j^{(n)}) = S_n(g).$$

(8) və (9) tənliklərini operator formasında yazaq:

$$\varphi_0 + K\varphi_0 = f_0, \quad \vec{\varphi} + M\vec{\varphi} = \vec{f},$$

burada K və M — aşağıdakı kimi təyin olunmuş xətti məhdud operatorlardır:

$$(Kv_0)(s) = v_0(s) + \int_0^T K(s, t)(v_0(t) - v_0(s)) dt,$$

$$(M\vec{v})(s) = \vec{v}(s) + \int_0^T M(s, t)(\vec{v}(t) - \vec{v}(s)) dt,$$

və bu operatorlar müvafiq olaraq fasiləsiz T-periodik funksiyalar və vektor-funksiyalar fəzalarında təyin olunmuşdur.

Daxil edilmiş kvadratur formulaları ailəsi aşağıdakı xətti məhdud operatorlara baxmağa imkan verir:

$$(K_n v_0)(s) = v_0(s) + \sum_{j=1}^n A_j^{(n)} K(s, t_j^{(n)})(v_0(t_j^{(n)}) - v_0(s)),$$

$$(M_n \vec{v})(s) = \vec{v}(s) + \sum_{j=1}^n A_j^{(n)} M(s, t_j^{(n)})(\vec{v}(t_j^{(n)}) - \vec{v}(s)).$$

Qoy $\varphi_0^{(n)}$ funksiyası aşağıdakı xətti tənliyin həlli olsun:

$$\varphi_0^{(n)}(s) + K_n \varphi_0^{(n)}(s) = f_0(s), \quad s \in [0, T]. \quad (10)$$

(10) tənliyinin həllinin axtarışı aşağıdakı xətti cəbri tənliklər sisteminin həllinə gətirilə bilər:

$$2\Phi_{0,i}^{(n)} + \sum_{j=1}^n A_j^{(n)} K(t_i^{(n)}, t_j^{(n)}) (\Phi_{0,j}^{(n)} - \Phi_{0,i}^{(n)}) = f_0(t_i^{(n)}). \quad (11)$$

Doğrudan da, $\Phi_{0,i}^{(n)} = \phi_0^{(n)}(t_i^{(n)})$ kəmiyyətləri, $i = 1, \dots, n$ üçün, (10) tənliyinin istənilən $\phi_0^{(n)}$ həlli üçün (11) sistemini ödəyir. Əksinə, əgər $\Phi_{0,i}^{(n)}$, $i = 1, \dots, n$ kəmiyyətlər toplusu (11) sisteminin həllidirsə, onda müvafiq funksiya (10) tənliyini ödəyir.

$$\varphi_0^{(n)}(s) = \left(f_0(s) - \sum_{j=1}^n A_j^{(n)} K(s, t_j^{(n)}) \Phi_{0,j}^{(n)} \right) \left(2 - \sum_{j=1}^n A_j^{(n)} K(s, t_j^{(n)}) \right)^{-1} \quad (12)$$

Xətti tənliyin həlli ilə xətti cəbri tənliklər sistemi arasında da oxşar bir əlaqə mövcuddur.

$$\vec{\varphi}^{(n)}(s) + M_n \vec{\varphi}^{(n)}(s) = \vec{f}(s), \quad \vec{\varphi}^{(n)} = (\varphi_1^{(n)}, \varphi_2^{(n)}), \quad s \in [0, T], \quad (13)$$

$$2\Phi_{1,i}^{(n)} + \sum_{j=1}^n A_j^{(n)} \left(\sum_{m=1}^2 M_{1,m}(t_i^{(n)}, t_j^{(n)}) \right) (\Phi_{m,j}^{(n)} - \Phi_{m,i}^{(n)}) = f_1(t_i^{(n)}),$$

$$2\Phi_{2,i}^{(n)} + \sum_{j=1}^n A_j^{(n)} \left(\sum_{m=1}^2 M_{2,m}(t_i^{(n)}, t_j^{(n)}) \right) (\Phi_{m,j}^{(n)} - \Phi_{m,i}^{(n)}) = f_2(t_i^{(n)}). \quad (14)$$

Burada $i=1, \dots, n$ - dir.

$\varphi^{(n)}$ vektor-funksiyasının komponentləri hər bir $s \in [0, T]$ üçün aşağıdakı iki xətti tənliklər sisteminin həlli kimi müəyyən edilə bilər.

$$\begin{aligned} & \left(2 - \sum_{j=1}^n A_j^{(n)} M_{1,1}(s, t_j^{(n)}) \right) \varphi_1^{(n)}(s) - \left(\sum_{j=1}^n A_j^{(n)} M_{1,2}(s, t_j^{(n)}) \right) \varphi_2^{(n)}(s) = \\ & = f_1(s) - \sum_{j=1}^n A_j^{(n)} \left(\sum_{m=1}^2 M_{1,m}(s, t_j^{(n)}) \Phi_{m,j}^{(n)} \right), \\ & - \left(\sum_{j=1}^n A_j^{(n)} M_{2,1}(s, t_j^{(n)}) \right) \varphi_1^{(n)}(s) + \left(2 - \sum_{j=1}^n A_j^{(n)} M_{2,2}(s, t_j^{(n)}) \right) \varphi_2^{(n)}(s) = \\ & = f_2(s) - \sum_{j=1}^n A_j^{(n)} \left(\sum_{m=1}^2 M_{2,m}(s, t_j^{(n)}) \Phi_{m,j}^{(n)} \right). \end{aligned}$$

Bu sistemin həll oluna bilməsi və (12) təsvirinin mümkünlüyü (Atkinson, 1997; Bremer və Roklin, 2010) işlərində araşdırılmışdır.

4. Xüsusi kvadratur formulasının qurulması. Yuxarıda təsvir olunan inteqral tənliklərin təxmini həllərinin qurulması yanaşması, baxılan hər iki məsələ üçün ümumi olan tərkib kvadratur formulaları ailəsi əsasında reallaşdırıla bilər. Gələcəkdə (Bakhvalov, 1967) işində əldə olunmuş aşağıdakı nəticədən istifadə edəcəyik.

Aşağıdakı inteqralın hesablanması məsələsinə baxaq

$$\int_0^1 g(t) dt,$$

burada $g(t)$ funksiyası $(0,1]$ intervalında müəyyən edilmişdir və müəyyən bir $0 < \rho < 10$ üçün aşağıdakı bərabərsizlikləri ödəyir.

$$\left| \frac{d^n g(t)}{dt^n} \right| \leq \text{const} \frac{(n+1)!}{(\rho t)^{n-\beta+1}}.$$

Burada $t \in (0,1]$, $n=0,1,2,\dots$ və $0 < \beta < 10$ -dir.

Əgər g funksiyası (15) şərtlərini ödəyirsə, onda elə bir natural N_0 ədədi mövcuddur ki, istənilən $N > N_0$ natural ədədi üçün

$$\bar{S}_N(g) = \sum_{i=1}^n \bar{A}_i^{(N)} g(t_i^{(N)})$$

$n=n(N)$ sayda düyünə malik kvadratur.

$$\left| \int_0^1 g(t) dt - \bar{S}_N(g) \right| \leq b \exp(-c \sqrt{n}),$$

b, c, c_1 və c_2 sabitləri isə müsbətdir və N -in seçimindən asılı deyildir.

5. Bucaqlı nöqtələrin yaxınlığında sərhəd inteqral tənliklərinin həllərinin asimptotikası. Yüksək dəqiqlik dərəcəsinə malik kvadratur formullarının qurulması üçün konturun bucaqlı nöqtələrinin yaxınlığında (8) və (9) inteqral tənliklərinin həllərinin davranışı haqqında məlumat tələb olunur. Bundan sonra belə qəbul edəcəyik ki, f_k funksiyaları, $k=1,2$, $s \in (s_j, s_{j+1})$ $j=1, \dots, J-1$ olan istənilən nöqtədə sonsuz dəfə diferensiallana biləndir və müəyyən bir $0 < \gamma < 10$ üçün aşağıdakı qiymətləndirmə doğrudur.

$$\left| \frac{d^n f_k(s)}{ds^n} \right| \leq \text{const} \left(\sum_{i=0}^1 \frac{n!}{|x(s) - x(s_{j+i})|^{n-\gamma}} \right).$$

Hər bir $j=0, \dots, J$ üçün elə β_{ij} , $i=0,1,2$ ədədlərini nəzərə alaq ki,

$$\beta_{0j} = \pi (\pi + |\pi - \alpha_j|)^{-1},$$

və $\beta_{1j} = \beta_{2j}$ ədədi verilmiş tənliyin köküdür.

$$\left(\left(\frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \right) \sin \beta (\pi + |\pi - \alpha_j|) \right)^2 = \left(\beta \sin (\pi + |\pi - \alpha_j|) \right)^2$$

ən kiçik müsbət həqiqi hissəyə malikdir. Qeyd edək ki, bütün β_{ij} ədədləri $(0.5, 1)$ intervalında yerləşir. Bu halda aşağıdakı nəticə doğrudur (Bremer və Roklin, 2010; Kress, 1999; Chendler, 1986).

$\lambda = \{\lambda_{ij}\}_{i=0,1,2, j=0,1, \dots, J}$ ədədlər çoxluğunu nəzərdən keçirək və elə olsun ki, $0 < \lambda_{ij} < \beta_{ij}$

Onda elə bir c ($\Gamma, f_0, f_1, f_2, \lambda$) sabiti mövcuddur ki, o yalnız Γ əyrisinin növbündən, f_k funksiyalarından ($k=0,1,2$) və λ ədədlər çoxluğundan asılıdır və (8) və (9) tənliklərinin həlləri üçün hər bir $s \in [0, T]$ nöqtəsində aşağıdakı qeyri-bərabərlik yerinə yetirilir.

$$|\varphi_i(s) - \varphi_i(s_j)| \leq c(\Gamma, f_0, f_1, f_2, \lambda) |x(s) - x(s_j)|^{\lambda_{ij}}.$$

Nəticə

İşdə potensiallar nəzəriyyəsiindən istifadə edərək Laplas tənliyi üçün qoyulmuş daxili Dirixle sərhəd məsələsiindən gələn inteqral tənliyin və elastiklik nəzəriyyəsinin birinci sərhəd məsələsiindən gələn inteqral tənliklər sisteminin həlli üçün kvadratur düsturlar üsulu verilmişdir. Həmçinin, alınan təqribi həllin xətasının eksponensial yaxınlaşma sürəti də verilmişdir.

Ədəbiyyat

1. Atkinson, K.E.H. (1997). *Chislennoe reshenie integral'nykh uravnenii vtorogo roda*. Cambridge University Press.
2. Babushka, I., Guo, B.K. və Stefan, E.P. (1990). Ob ehksponentsial'noi skhodimosti h-p versii granichno-ehlementnogo metoda Galerkina na mnogougol'nykh oblastyakh. *Math. Methods Appl. Sci.*, 12(5), 413–427.
3. Bakhvalov, N.S. (1967). Ob optimal'noi skorosti integrirovaniya analiticheskikh funktsii. *ZH. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 7(5), 1011–1020.
4. Bremer, I., Roklin, V. (2010). Ehffektivnaya diskretizatsiya granichnykh integral'nykh uravnenii Laplasa v mnogougol'nykh oblastyakh. *J. Comput. Phys.*, 229(7), 2507–2525.
5. Chendler, A.A. (1986). Sverkhshodyashchiesya approksimatsii resheniya odnogo granichnogo integral'nogo uravneniya v mnogougol'nykh oblastyakh. *SIAM J. Numer. Anal.*, 23(6), 1214–1229.
6. Grekhem, I.G. və Chendler, A.A. (1988). Metody vysokogo poryadka dlya lineinykh funktsionalov reshenii integral'nykh uravnenii vtorogo roda. *SIAM J. Numer. Anal.*, 25(5), 1118–1137.
7. Khel'zing, I. və Oiyala, R. (2008). Uglovye singulyarnosti dlya ehllipticheskikh zadach: integral'nye uravneniya, utochnennye setki, kvadratury i szhatye obratnye operatory. *J. Comput. Phys.*, 227(20), 8820–8840.
8. Kong, YU.YU., Bremer, I. və Roklin, V. (2011). Adaptivnyi bystryi pryamoi reshatel' dlya granichnykh integral'nykh uravnenii vtorogo roda. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 31(3), 346–369.
9. Kress, R. (1990). Metod Nyustrema dlya granichnykh integral'nykh uravnenii v uglovykh oblastyakh. *Numer. Math.*, 58(1), 145–161.
10. Kress, R. (1999). *Lineinye integral'nye uravneniya*. Springer, Geidel'berg.
11. Maz'ya, V.G. (1988). Granichnye integral'nye uravneniya. v sb.: Analiz-4, VINITI, Itogi nauki i tekhniki. *Seriya: Sovremennye problemy matematiki. Fundamental'nye napravleniya*, 27, 131–228.
12. Maz'ya, V.G. və Solov'ev, A.A. (1998). Integral'nye uravneniya logarifmicheskogo potentsiala na zamknutykh (gladkikh) konturakh v fazakh Gel'dera. *Algebra i analiz*, 10(5), 85–142.
13. Parton, V.Z. və Perlin, P.I. (1977). *Integral'nye uravneniya v teorii uprugosti*. Nauka.

Daxil oldu: 07.12.2025

Qəbul edildi: 11.03.2026